

## Modelo de Elementos Finitos Axisimétricos para Análise de Cascas Finas e Espessas

**Aluno: Julio Ribeiro Coutinho**  
**Orientador: Carlos Alberto Almeida**

### Introdução

O comportamento de cascas axissimétricas, sob carregamentos de pressão e forças concentradas e também diversas formas de condições de contorno, é estudado neste trabalho considerando-se o método dos elementos finitos. O modelo utiliza os polinômios de Lagrange na aproximação do campo de deslocamentos ao longo do comprimento considerados os valores nodais como variáveis de estado. As componentes de tensões no elemento são avaliadas a partir destes valores nodais e gráficamente apresentadas em um ambiente Matlab.

Este estudo tem a sua importância associada à interpretação física da solução numérica fornecida que, adequadamente considerada na formulação do modelo numérico, representa uma importante redução no custo computacional associado ao esforço computacional envolvido na solução com o método dos elementos finitos utilizado, por não exigir uma larga base de polinômios de aproximação.

Com este objetivo foi desenvolvido um programa em linguagem C que permite simular vasos de pressão de paredes finas e espessas submetidos a carregamentos axiais e radiais concentrados, sem a necessidade de tratamento numérico diferenciado considerando-se diversas espessuras, admitindo-se também diversas condições de contorno na casca. A análise dos resultados numéricos obtidos é realizada através da comparação com a solução analítica disponível na literatura para apenas alguns casos de cascas finas, bem como na comparação com os resultados de outras cascas utilizando diferentes malhas de discretização de elementos finitos.

O programa trata de dois casos, a partir dos quais pode-se modelar qualquer estrutura axissimétrica: o cilindro e a esfera. O equacionamento do caso do cilindro já havia sido completado anteriormente por outros alunos, sendo o foco desse relatório o caso da esfera.

### Formulação Analítica

O equilíbrio de um corpo é verificado quando qualquer uma de suas partições está igualmente em equilíbrio, Harry-2004. Linearizando-se as funções de tensões por suas derivadas e sabendo que o sistema possui simetria axial a seguinte equação de equilíbrio é obtida para um sólido cilíndrico, Fig. 1:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \epsilon \quad (1)$$

em função das componentes radiais e circunferenciais das tensões normais. Esta equação é expressa em função das componentes radial  $W$  e longitudinal  $U$  dos deslocamentos na casca utilizando-se as constitutivas para um material elástico, homogêneo e isotrópico, a lei de Hooke :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dr} &= \frac{\sigma_r}{E} \\ \frac{W}{r} &= \frac{\sigma_\theta}{E} \\ \frac{dU}{dr} &= \frac{\sigma_r}{E} \end{aligned} \quad (2)$$

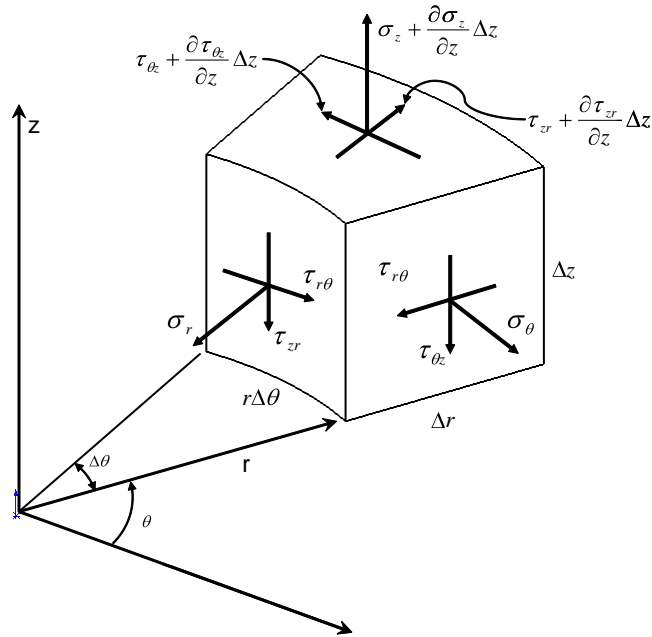


Figura 1 - Tensões no Elemento de Casca Cilíndrica

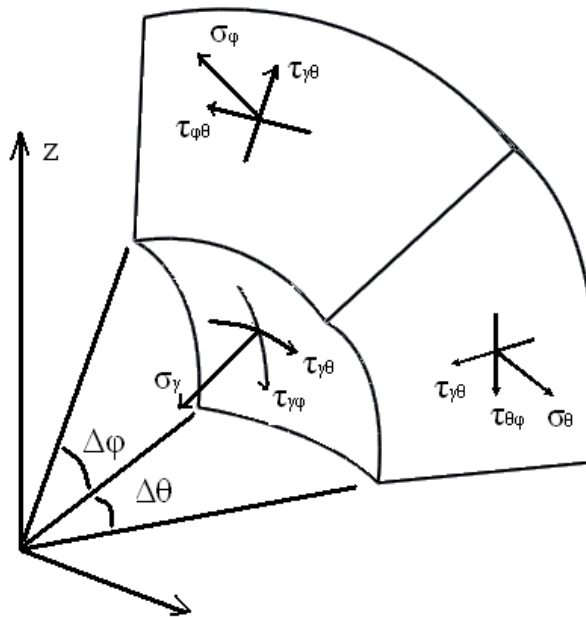


Figura 2 - Tensões no Elemento de Casca Esférica

e as equações de compatibilidade geométrica para deformações infinitesimais em coordenadas cilíndricas, Harry-2004. Desta forma a equação em (1) resulta, escrita em função do deslocamento radial  $W$ , na forma homogênea seguinte

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r^2} = 0 \quad (3)$$

onde, considerando-se os carregamentos de pressão interna  $p_i$  e pressão externa  $p_o$ , resulta

$$A = \frac{(1-\nu)}{E} \left[ \frac{1}{(r_i^2 - r_o^2)} \frac{1}{r} \right] \quad (4)$$

$$B = \frac{(1+\nu)}{E} \left[ \frac{1}{(r_i^2 - r_o^2)} \frac{1}{r} \right] \quad (4)$$

Voltando-se as equações de compatibilidade geométrica e constitutiva com os resultados dos deslocamentos apresentados acima, resulta nas seguintes equações que descrevem as tensões:

$$\sigma_r = \frac{1}{(r_i^2 - r_o^2)} \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r} \right) \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{(r_i^2 - r_o^2)} \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r} \right) \quad (5)$$

Nesta solução utilizou-se a condição do cilindro espesso livre de quaisquer condições de fixação. As funções que compõe esta solução são empregadas na formulação como funções base do espaço de funções da solução numérica por elementos finitos.

Agora, considerando-se o caso de uma esfera espessa temos, para as componentes de tensões apresentadas na Fig. 2, a seguinte equação de equilíbrio, representativa das forças na direção radial:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sigma_r \right) \right] = 0 \quad (6)$$

Procedendo-se com raciocínio análogo ao apresentado para o corpo cilíndrico obtém-se, para as equações de compatibilidade geométrica e constitutivas

$$\frac{dW}{dr} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (7)$$

$$\frac{W}{r} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (7)$$

$$\frac{W}{r} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (7)$$

que substituídas na equação (6) resulta na seguinte equação diferencial para o único deslocamento radial no sistema coordenado esférico considerado, Harry-2004,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) = 0 \quad (8)$$

onde

$$A_2 = \frac{(1-2\nu)}{E(r_o^3 - r_i^3)} [R_i^3 - P_0^3] \quad (9)$$

$$B_2 = \frac{(1+\nu)}{2E} \left[ \frac{r_i^3 r_o^3}{(r_o^3 - r_i^3)} [R - P_0] \right] \quad (9)$$

Conforme proposição deste estudo, a solução numérica a ser considerada para os deslocamentos na direção radial resulta da superposição das duas soluções apresentadas, para a esfera e para o cilindro. Desta forma temos,

$$v = v_1 + v_2 \quad (10)$$

### Formulação Matemática da Teoria Geral de Cascas

Cascas são definidas como a região delimitada por duas superfícies paralelas. Para representá-las matematicamente utiliza-se a superfície média como referência de coordenadas e deslocamentos, sendo esta superfície o lugar geométrico dos pontos equidistantes das duas superfícies consideradas. A espessura da casca é definida pela distância entre as superfícies tomada ao longo da direção normal às superfícies. Desta forma, da caracterização da superfície média e da espessura, define-se matematicamente a casca.

- Superfície média

Para a definição geométrica deste, utilizou-se dois referencias ortogonais. Um global, tridimensional e outro local bidimensional de coordenadas curvilíneas longitudinal  $\xi$  e circunferência  $\theta$ , Fig. 3. Assim, caracterizam-se as coordenadas globais através das definições locais como na expressão:

$$X = R_1 \theta + z \quad (11)$$

onde  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  são os vetores da base canônica do referencial global.

Para a superfície média axissimétrica, a cada coordenada  $\xi$  na casca tem-se um círculo e, portanto, reescrevendo  $\hat{X}$  obtém-se

$$X = r(\xi) \cos \theta + z(\xi) \quad (12)$$

onde  $r(\xi)$  e  $z(\xi)$  são as coordenadas que definem a geratriz da superfície média do corpo axissimétrico, Fig. 3.

De considerações geométricas obtém-se a variação do comprimento do vetor posição  $ds$  e os raios principais de curvatura  $R_1$  e  $R_2$  na superfície média da casca, Harry-2004, da equação:

(Melhorando a nomenclatura:  $s = \int \sqrt{dr^2 + dz^2}$ )

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 \quad (13)$$

$$R_1 = \frac{s^3}{r^2 - z^2} \quad (14)$$

$$R_2 = \frac{s^3}{z^2} \quad (15)$$

onde utiliza-se a nomenclatura  $s = \int \sqrt{dr^2 + dz^2}$ .

Para a descrição da casca é acrescentado ao referencial local uma coordenada na direção perpendicular à superfície média da casca  $\zeta$ . Considerando a casca de espessura  $h$ , define-se a coordenada local  $T = \frac{h}{2}\zeta$

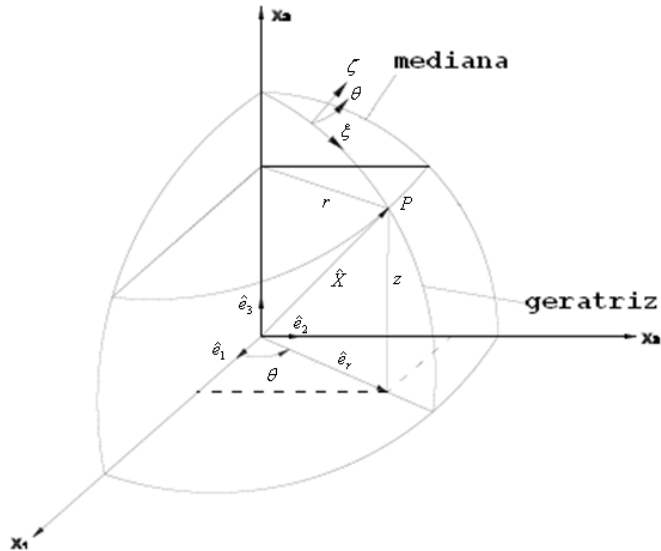


Figura 3 - Sistemas de Coordenadas em Uma Casca Axissimétrica

- Deformações e Deslocamentos

Os deslocamentos da casca axissimétrica nas direções locais  $(\xi, \theta, \zeta)$  são, respectivamente,  $U_1, U_2$  e  $W$ . Desta forma as seis componentes de deformações, três lineares e três angulares, podem ser escritas na seguinte forma, Harry-2002,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{1}{s \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{U_2}{r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{sW}{R_1} \right) = \frac{1}{s \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{sW}{R_1} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + \frac{U_1}{s} r' + \frac{rW}{R_2} \right) = \frac{1}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \left( \frac{U_1}{s} r' + \frac{rW}{R_2} \right) \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} &= \frac{\partial W}{\partial T} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\gamma_{\xi\theta} = \frac{r\left(1+\frac{T}{R_2}\right)}{s\left(1+\frac{T}{R_1}\right)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{U_2}{r\left(1+\frac{T}{R_2}\right)} \right) + \frac{s\left(1+\frac{T}{R_1}\right)}{r\left(1+\frac{T}{R_2}\right)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{U_1}{s\left(1+\frac{T}{R_1}\right)} \right) = 0$$

$$\gamma_{\xi\xi} = \frac{1}{s\left(1+\frac{T}{R_1}\right)} \frac{\partial W}{\partial \xi} + s\left(1+\frac{T}{R_1}\right) \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{U_1}{s\left(1+\frac{T}{R_1}\right)} \right) \quad (17)$$

$$\gamma_{\theta\xi} = \frac{1}{r\left(1+\frac{T}{R_2}\right)} \frac{\partial W}{\partial \theta} + r\left(1+\frac{T}{R_2}\right) \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{U_2}{r\left(1+\frac{T}{R_2}\right)} \right) = 0$$

### Formulação Numérica

Utilizando-se o método dos elementos finitos, Bathe-1996, considerou-se a partição do contínuo em elementos finitesimais de geometria compatível ao sistema coordenado da casca, neste caso casca com simetria axial, aos quais são impostas condições de compatibilidade, constitutiva e de equilíbrio, que descrevem as variáveis desejadas. Como base teórica do método, usualmente, utiliza-se um conjunto de funções para descrever os campos de deslocamentos em cada elemento, a partir de graus-de-liberdade nodais (funções de forma convencionais). Este método pode ser empregado em estruturas unidimensionais, bidimensionais (caso presente) e tridimensionais. No caso do presente estudo, para elementos de geometria axissimétrica (ex.: cilindros, esferas, placas circulares, etc.), considera-se que o deslocamento longitudinal em um elemento é dado por uma função cúbica e o radial é dado por uma combinação linear entre a solução analítica para o caso de vasos esféricos e cilíndricos, Harry-2004. Os elementos podem ser distribuídos de acordo com a necessidade da análise, cujo refinamento da malha poderá exigir uma concentração de elementos nas regiões da estrutura cuja variação dos deslocamentos seja mais intensa. As expressões para os deslocamentos axial e radial são, respectivamente:

$$U = \sum_{i=1}^4 N_i \phi_i \quad (19)$$

$$e = \sum_{i=1}^4 N_i \frac{W_i}{R} + \sum_{i=1}^3 N_i \frac{V_i}{R} \quad (20)$$

Empregando-se as equações constitutivas para materiais linearmente elásticos segundo a lei de Hooke e aplicando a condição de contorno de nulidade nas paredes interna e externa da tensão cisalhante, é possível extrair duas variáveis das equações acima. Assim, Harry-2004,



$$\quad (21)$$



$$\quad (22)$$

Com as variáveis características dos deslocamentos pode-se, a partir do método de energia, obter as condições do equilíbrio através da minimização da função de energia potencial,

$$\delta \Pi = \delta \left( \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \int_V b_i u_i dV - \int_S F_i u_i dS \right) \quad (23)$$

Implicando em:

$$\delta \Pi = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_V b_i \delta u_i dV - \int_S F_i \delta u_i dS = 0 \quad (24)$$

onde tem-se, para um arco de 1 radiano de circunferência,

$$dV = r d\theta dz \quad (25)$$

Nas equações acima, as variáveis de estável – deslocamentos – estão listadas no vetor  $\hat{u}$ ,  $F$  representa as forças de superfície que atuam sobre o corpo,  $\sigma_{ij}$  é o vetor das deformações e  $\epsilon_{ij}$  o vetor das tensões. Por hipótese, o material é homogêneo e isotrópico e obedece a lei de Hooke,

$$\hat{\sigma} = C \hat{\epsilon} \quad (26)$$

onde C é a matriz constitutiva das propriedades elásticas do material:

$$C = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

O domínio da casca é subdividido em partições - elementos - e uma aproximação do campo de deslocamentos  $\hat{u}$  é realizada em cada elemento, através das variáveis que os representam, agrupadas no vetor  $\hat{U}^n$ , para cada nó-i. Assim, para todo elemento-n,

$$\hat{u} = H_{(xyz)}^{(n)} \hat{U}^n \quad (28)$$

Com as equações das deformações expressas em função dos deslocamentos, obtém-se a matriz que relaciona as variáveis dos deslocamentos dos nós de um elemento ao campo de deformações Harry-2004,

$$\hat{\epsilon} = B_{(xyz)}^{(n)} \hat{U}^n \quad (29)$$

Logo a equação de minimização resulta

$$\int_V \delta \left( \frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{e} - \hat{R} \right) \delta \mathbf{e} = 0 \quad (30)$$

onde

$$K = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{e} \hat{R} \delta \mathbf{e} \quad (31)$$

Desta forma obtêm-se a matriz de rigidez  $K$  e o vetor carregamento  $\hat{R}$ , com contribuições para vetor de forças axiais e radiais, que no nó em que a força está aplicada, resultam

$$F_q = q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ hR_2 \\ h \\ h \left( R_2^2 + \frac{h^2}{12} \right) \\ \ln \left( \frac{R_2 + h/2}{R_2 - h/2} \right) \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\text{e ainda: } F_f = f \begin{bmatrix} R_2 h \\ h/15 \\ -A h^3 \\ -A \frac{h^2}{24} \left[ R_2 \left[ \frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_i} \right] + \frac{h}{5} \left[ \frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_i} \right] \right] \\ -7A \frac{h^3 R_2}{120} \\ -A \frac{h^2}{24} \left[ R_2 \left[ \frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r_i^2} \right] + \frac{h}{5} \left[ \frac{1}{r_o^2} + \frac{1}{r_i^2} \right] \right] \end{bmatrix} \quad (33)$$

No caso da componente axial para os demais nós do elemento  $F_f = F_f \mathbf{1} = \mathbf{C}$ . Ainda, o valor de  $A_i$  varia de acordo com o nó em que é calculado o vetor. Os valores são -2.75, +2.75, -0.75 e +0.75 para os nós 1, 2, 3 e 4 respectivamente. Além disso, foi feita a hipótese simplificadora de que  $R_1 \rightarrow \infty$  e  $R_2 = c^{te}$ , uma vez que trata-se de um cilindro.

A matriz  $B$  de cada elemento possui ordem 4x6 e está explicitada no Apêndice deste trabalho.

Os elementos que fazem a discretização do problema contínuo são unidimensionais, sua geometria é um arco de cilindro de 1° e seu comprimento é ditado pela divisão da malha. Estes possuem 4 nós distribuídos de acordo com a figura 3 e as coordenadas e deslocamento na direção longitudinal são interpoladas através de polinômios de Lagrange.

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \quad \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ;$$

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; \quad \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$U_0 = \sum_{i=1}^4 N_i U_i ; \quad \Delta_0 = \sum_{i=1}^4 N_i \Delta_i \quad (37)$$

$$U_0 = \sum_{i=1}^4 N_i U_i ; \quad \Delta_0 = \sum_{i=1}^4 N_i \Delta_i$$

$$W_0 = \sum_{i=1}^4 N_i W_i ; \quad \Delta_0 = \sum_{i=1}^4 N_i \Delta_i$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^4 N_i V_i ; \quad \Delta_0 = \sum_{i=1}^4 N_i \Delta_i \quad (38)$$

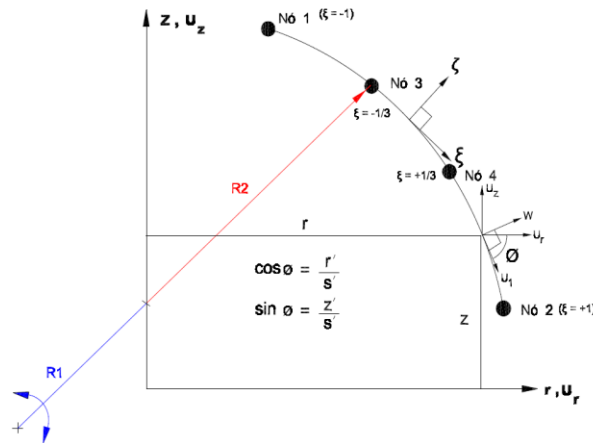


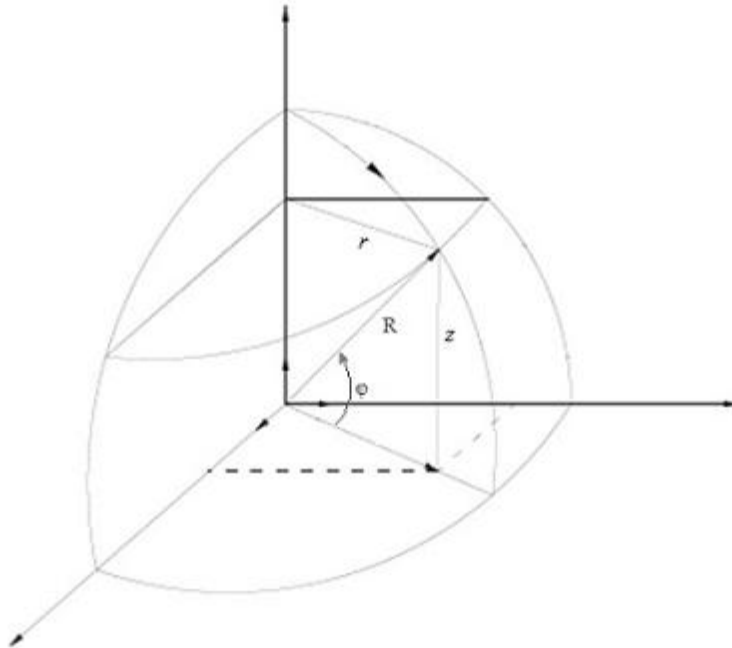
Figura 4 - Elementos Axissimétrico de 4 nós

Desta forma o Sistema se torna discretizado e linear, podendo ser resolvido apenas com a inversão de uma matriz. Porém, ainda é desejado impor outras restrições ao modelo como a continuidade. Para isso é aplicado o método das penalidades descrito em [Harry,2004], onde é somado à função a ser minimizada o quadrado das funções restrição a serem prescritas multiplicadas por uma variável  $\alpha$ , de ajuste de ordem de grandeza.

No Programa são implementadas duas penalidades: de continuidade, responsável por garantir a continuidade do deslocamento axial nas paredes interna e externa e penalidade de fixação, responsável por garantir a fixação de uma secção reta em um nó. Desenvolveu-se uma série de testes para encontrar um valor para  $\alpha$  que garantisse a condição em diversas malhas e não comprometer a minimização da função de potencial.

Segundo [5] os deslocamentos não apresentam diferenças maiores do que  $1 \times 10^{-3} \%$  o que aparentemente significaria que a variação de  $\alpha$  não influencia muito na solução. Mas ao observar os gráficos das tensões principalmente o de tensões radiais, fica claro que as soluções onde  $\alpha = 10^8$  ou  $\alpha = 10^{12}$  não atendem às condições de contorno das tensões na parede interna onde  $\sigma_{\xi\xi} = -p_i$ . Quando o valor de  $\alpha = 10^8$  então as tensões oscilam muito próximas à extremidade fixa, enquanto se  $\alpha = 10^{12}$  então as tensões oscilações ocorrem ao longo de todo o comprimento significando que  $\alpha$  é tão grande que o termo de restrição tem mais peso na minimização do que a própria energia potencial.

## Equacionamento para Esferas



Neste caso utiliza-se diretamente as coordenadas raio  $R$  da esfera, e o ângulo  $\varphi$  de rotação, ao contrário das coordenadas  $r$  and  $z$  no cilindro, como mostrado na figura acima. Assim as equações de equilíbrio são desenvolvidas com base neste novo sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} r &= R \cos(\varphi) \\ z &= R \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (39)$$

que resultam, aplicando-se as fórmulas discutidas no início desse relatório,

$$R_1 = R_2 = R \quad (40)$$

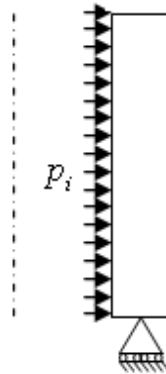
Assim, novas deduções das equações acima - específicas para a geometria esférica - foram necessárias para acomodar essas diferenças incluindo-se o cálculo da matriz de rigidez e do vetor das forças.

Com essas alterações prontas, iniciamos a fase de testes.

## Resultados Numéricos

Para fazermos a verificação do programa, considerou-se inicialmente uma geometria muito próxima de um cilindro, de forma que implementação anterior servisse como base para a comparação dos resultados.

Assim, foi considerado um cilindro livre sob ação da pressão interna conforme mostrado na figura abaixo..



- Raio  $R=1000$  m
  - Comprimento  $L=209$  m
  - Módulo de elasticidade  $E=200$  Gpa
  - Coeficiente de Poisson  $\nu=0,3$
- Sendo a pressão interna  $p_i=10$  kPa

A esfera utilizada para isso possui raio  $R=1000$  m, com o ângulo  $\phi$  variando de  $-6^\circ$  a  $6^\circ$ . Esta geometria permite, com a pequena curvatura, aproximar-se a porção da esfera à de uma superfície cilíndrica. Desta análise concluiu-se haver erros na implementação do modelo de esfera .

Após correções nas componentes deste vetor força externa equivalente, as componentes obtidas comparam-se favoravelmente conforme está mostrado na tabela abaixo. O erro máximo é de :

Vetor Força	Esfera	Cilindro
forca[0]	0.000	0.000
forca[1]	0.000	0.000
forca[2]	260356491.594	261119375.000
forca[3]	260486.735	261250.000
forca[4]	260226313348.591	260988815312.615
forca[5]	260.617	261.381
forca[6]	0.000	0.000
forca[7]	0.000	0.000
forca[8]	783360996.778	783358125.000
forca[9]	783752.873	783750.000
forca[10]	782969316279.611	782966445937.698
forca[11]	784.145	784.142
forca[12]	0.000	0.000

forca[13]	0.000	0.000
forca[14]	783360996.778	783358125.000
forca[15]	783752.873	783750.000
forca[16]	782969316279.611	782966445937.698
forca[17]	784.145	784.142
forca[18]	0.000	0.000
forca[19]	0.000	0
forca[20]	260356491.594	261119375.000
forca[21]	260486.735	261250.000
forca[22]	260226313348.591	260988815312.615
forca[23]	260.62	261.381

Em seguida, foi verificada a Matriz de Rigidez, esta formada a partir da integração da matriz B e C no volume do sólido. Como a matriz C não depende da geometria, a mesma rotina do cilindro foi utilizada, restando assim a verificação da matriz B e da integração numérica.

Confirmado que integração numérica correspondia à teoria, passou-se à matriz B, sendo criada uma nova rotina específica para a esfera.

Com este procedimento uma grande maioria dos erros presentes na matriz B foram resolvidos, restando agora 4 dos 24 termos de cada nó, ainda com erros, conforme está mostrado a seguir.

Exemplo, para o nó 1:

Termos com erros	Esfera	
$a_{13}$	0,000825	0,000053
$a_{14}$	0,000001	0,000000
$a_{15}$	0,824380	0,052822
$a_{16}$	0,000000	0,000000

O mesmo ocorre para os outros nós do elemento.

Para o caso analisado obtive os seguintes resultados para os deslocamentos deformações, com o atual programa:

#### Cilindro:

z (m)	w (m)
0	0,045489
69,6667	0,045487
139,3333	0,045487
209	0,045489

#### Esfera:

<b>z (m)</b>	<b>w (m)</b>
-104,5285	0,017207
-34,8995	0,017530
34,8995	0,017530
104,5285	0,017207

No estágio atual, podemos observar que, em termos de ordem de grandeza, os resultados já se aproximam aos esperados, porém, devido as discrepâncias encontradas na matriz B, eles ainda diferem.

### **Conclusões**

A hipótese utilizada para os testes têm-se provado uma aproximação aceitável para os objetivos do modelo considerado. Os poucos erros ainda observados, quando solucionados, permitirão iniciar-se a fase de testes para as comparações com as soluções analíticas para esferas.

Com a conclusão do caso das esferas, será iniciada a parte final da construção do programa: a interação dos dois casos para simular uma estrutura axissimétrica composta.

### **Referências**

- 1 - Espinoza, Harry G. S. **Formulação de Cascas Espessas Axissimétricas Utilizando Elementos Finitos Enriquecidos**. PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, Dissertação de Mestrado, 2004, 107p.
- 2 - Bathe, Klaus-Jürgen. **Finite Element Procedures**, Prentice Hall, 1996. 1037p.
- 3- S. Timoshenko e S Woinowsky-Krieger, **Theory of Plates and Shells**, Second Edition, Engineering Societies Monographs, 1959, 580p.
- 4- Raymond J. Roark e Warren C. Young, **Formulas for Stress and Strain**, Fifth Edition, McGraw-Hill, 1975, 924p.
- 5 – Barreto, M. P. e Almeida, C. A. **Elementos Finitos aplicados às Cascas Axissimétricas**. Relatório de Iniciação Científica, 2007-8. PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 18p.